РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИИ В ЦЕЛОСТНОМ КОЛЬЦЕ *

МАЛАШОНОК Г. И.
(Львов)

Аннотация

Предлагается модифицированный алгоритм Гаусса для решения системы линейных уравнений в целостном кольце, а также построенный на его основе алгоритм вычисления элементов присоединенной матрицы.

1 Введение

Будем рассматривать систему линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = a_{i,n+1}, \quad i = l, 2, \dots, , \tag{1.1}$$

коэффициенты и свободные члены которой принадлежат некоторому целостному коммутативному кольцу К. Такую систему будем записывать с помощью расширенной матрицы с размерами $n \times (n+l)$:

$$B = \|a_{ij}\|, i = l, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n+l. \tag{1.2}$$

Введем, как обычно, матрицу, образованную коэффициентами системы (1.1), которую обозначим через A, и матрицы A_i, $i = 1, 2, \dots, n$, которые получаются из матрицы A заменой элементов i-го столбца свободными членами, а их детерминанты обозначим, соответственно, Δ и Δ_i. Решение системы (1.1), вообще говоря, принадлежит полю частных кольца K (см. [1], [2]). Однако имеются алгоритмы решения системы (1.1),

*ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, Том 23, Ноябрь-Декабрь 1983, № 6, 1497-1500

промежуточные результаты которых лежат в кольце K. К ним относится, например, схема умножения и вычитания метода Гаусса [3], а также метод решения по формулам Крамера

$$x_i = \Delta_i / \Delta, i = l, 2, \ldots, , \tag{1.3}$$

когда определители ищутся разложением по строкам или столбцам.

Такие алгоритмы решения в кольце имеют то преимущество, что не допускают промежуточных ошибок округления, а также имеют более простые операции. Однако решение с помощью формул Крамера при непосредственном отыскании определителей только с помощью операций сложения, вычитания и умножения требует очень большого числа операций, а схема умножения и вычитания метода Гаусса приводит к быстрому росту разрядности чисел.

Рассматриваемый ниже алгоритм решения в целостном коммутативном кольце не требует большого количества операций и не приводит к быстрому росту разрядности элементов матриц из-за использования операции сокращения обеих частей уравнения на не равный нулю общий множитель, что позволительно в целостном кольце. Как обычно, совершим сначала прямой ход и приведем матрицу B к эквивалентной треугольной матрице B_n, а затем - обратный ход и придем к эквивалентной диагональной матрице D_1.

2 Преобразование к треугольному виду

Обозначим через A_{ij}^k, $l \leq k \leq n$, $k \leq j \leq n+1$, квадратную матрицу порядка k, представляющую собой левую верхнюю часть матрицы B, окаймленную строкой i и столбцом j, т. е.

$$A_{ij}^k = \|a_{pq}\|, \quad p = 1, 2, \ldots, k-1, \quad i, q = l, 2, \ldots, k-1, j, \tag{2.1}$$

и введем обозначение для ее детерминанта:

$$a_{ij}^k = |A_{ij}^k|. \tag{2.2}$$

Заметим, что $a_{ij}^1 = a_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = l, 2, \ldots, n+l$.

Будем предполагать, что имеет место условие выполнимости алгоритма Гаусса, т. е. диагональные миноры не равны нулю:

$$a_{kk}^k \neq 0, k = i, 2, \ldots, n. \tag{2.3}$$

На первом шаге матрицу B преобразуем по схеме умножения и вычитания [3]: из каждой строки с индексом i, $i \geq 2$, умноженной на a_{11}, вычтем первую строку, умноженную на a_{i1}. В результате получим матрицу

$$B_2 = \|b^2_{i,j}\|, \quad b^2_{1j} = a^1_{1j}, \quad b^2_{i1} = 0, \quad b^2_{ij} = a^2_{ij}, \quad i > 1,$$

элементы которой определяются формулами (2.2).

Каждый очередной шаг, кроме первого, требует выполнения операции сокращения на общий множитель. Покажем, как производится k-й шаг, $k \geq 2$. Пусть на предыдущем шаге получена следующая матрица с элементами (2.2):

$$B_k = \|b^k_{ij}\|, \qquad b^k_{ij} = \begin{cases} a^i_{ij} & \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, k-1, \ j \geq i, \\ 0 & \text{при} \quad i > j, j = 1, 2, \ldots, k-1, \\ a^k_{ij} & \text{при} \quad i, j \geq k. \end{cases} \tag{2.4}$$

На k-м шаге матрицу B^k преобразуем так: из каждой строки с индексом i, $i \geq k+1$, умноженной на a^k_{kk} вычтем строку с индексом k, умноженную на a^k_{ik}, тогда элемент j-го столбца, $j \geq k+1$, строки i примет вид

$$a^k_{kk} a^k_{ij} - a^k_{ik} a^k_{kj} \tag{2.5}$$

а в первых k столбцах будут стоять нули.

Главная особенность этого метода состоит в том, что все элементы (2.5) можно сократить на ведущий элемент $a^{k-1}_{k-1,k-1}$ и получить матрицу B_{k+1} в соответствии с (2.4).

Чтобы показать это, нам понадобится детерминантное тождество Сильвестра [4], которое для матрицы A порядка n и для любого s, $s = l, 2, \ldots, n-1$, в принятых выше обозначениях (2.1) и (2.2) запишется так:

$$|M^s| = (a^{s-1}_{s-1,s-1})^{n-s} \Delta, \tag{2.6}$$

где M^s, $s = l, 2, \ldots, n$, – матрицы порядка $n - s + 1$ с элементами a^s_{pq}, $p, q = s, s+l, \ldots, n$.

Заметим, что детерминантное тождество Сильвестра справедливо для матриц над коммутативным целостным кольцом; чтобы показать это, достаточно в доказательстве данного тождества [4] воспользоваться методом Гаусса по схеме умножения и вычитания.

Запишем детерминантное тождество Сильвестра для матрицы $A^{k+1}_{i,j}$ порядка $k + l$, $k < i \leq n$, $k < j \leq n+1$, и при условии $s = k$:

$$\begin{vmatrix} a^k_{kk} & a^k_{kj} \\ a^k_{ik} & a^k_{ij} \end{vmatrix} = a^{k-1}_{k-1,k-1} a^{k+1}_{ij}.$$

Это тождество показывает, что выражение (2.5) раскладывается на произведение двух сомножителей, что позволяет сократить все строки начиная с (k+1)-й на общий множитель a^{k-1}_{k-1,k_1}, который не равен нулю в силу (2.3), и в результате получить матрицу B_{k+1}. После $(n-1)$-го шага прямого хода получим искомую треугольную матрицу B_n, у которой по главной диагонали стоят диагональные миноры a_{kk}^k, $k = 1, 2, \ldots, n$, а все элементы под главной диагональю – нули.

3 Преобразование к диагональному виду

Матрицу с размерами $n \times (n+1)$ обозначим таким образом:

$$D_k = \|d_{ij}\|, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.1a}$$

$$d_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i > j, \text{ и при } i = k, \ldots, n-1, \ j = i+1, \ldots, n; \\ a_{ij}^i & \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, k-1, \ j \geq i; \end{cases} \tag{3.1b}$$

$$d_{ii} = \Delta; d_{i,n+1} = \Delta_i, \ i = k, \ldots, n. \tag{3.1c}$$

Заметим, что из определения (2.2) следует, что $a_{nn}^n = \Delta$ и $a_{n,n+1}^n = \Delta_n$, поэтому $D_n = B_n$. Таким образом, на первом шаге обратного хода уже имеется матрица D_n.

Пусть на некотором шаге обратного хода получена матрица D_k, $k = 2, 3, \ldots, n$. Чтобы совершить очередной шаг, умножим все элементы строки $k-1$ на Δ и вычтем из нее все нижние строки с индексами i, $i = k, k+i, \ldots, n$, умножая их предварительно на $a_{k-1,i}^{k-1}$. В результате в (k-1)-й строке диагональным элементом станет $a_{k-1,k-1}^{k-1}\Delta$, элементом в последнем столбце станет

$$a_{k-1,n+1}^{k-1}\Delta - \sum_{i=k}^{n} a_{k-1,i}^{k-1}\Delta_i, \tag{3.2}$$

а все остальные элементы обратятся в нуль.

Покажем теперь, что выражение (3.2) раскладывается на множители Δ_{k-1} и $a_{k-1,k-1}^{k-1}$. Для этого введем квадратные матрицы M_j^s, $1 \leq s \leq j \leq n$, образованные заменой j-го столбца на $(n+1)$-й в матрице M^s; тогда тождество Сильвестра для матриц A_j, и для любого s, $s = 1, 2, \ldots, n$, запишется в виде

$$|M_j^s| = (a_{k-1,k-1}^{k-1})^{n-s}\Delta_j. \tag{3.3}$$

Подставим значения $|M_j^{k-1}|$ и $|M^{k-1}|$ из (3.3) и (2.6) в тождество

$$\sum_{j=k-1}^{n} a_{k-1,j}^{k-1}|M_j^{k-1}| = a_{k-1,n+1}^{k-1}|M^{k-1}|,$$

справедливость которого легко проверяется разложением по столбцу j и заменой порядка суммирования в левой части.

После сокращения на $(a_{k-2,k-2}^{k-2})^{n-k+1}$ и перегруппировки слагаемых получим тождество

$$a_{k-1,n+1}^{k-1}\Delta - \sum_{i=k}^{n} a_{k-1,i}^{k-1}\Delta_i = a_{k-1,j}^{k-1}\Delta_{k-1}.$$

Таким образом, показано, что элементы $(k-1)$-й строки можно сократить на $a_{k-1,k-1}^{k-1}$ и в результате получить матрицу D_{k-1}, в соответствии с (3.1).

После $n-1$ шага обратного хода получим диагональную матрицу D_1, у которой все элементы на главной диагонали равны детерминанту основной матрицы Δ, в последнем столбце в i-й строке, $i = l, 2, \ldots, n$, стоит детерминант Δ_i, а все остальные элементы равны нулю.

Таким образом, получено решение по формулам Крамера (1.3); вычисление всех детерминантов Δ и Δ_i проводилось одновременно, причем все время внутри кольца K.

4 Алгоритм

Выпишем теперь отдельно алгоритм, предполагая, что имеет место условие выполнимости алгоритма Гаусса (2.3).

Прямой ход.

1. Умножаем каждую строку расширенной матрицы (1.2) с номером i, $i \geq 2$, на a_{11} и вычитаем из нее первую строку, умноженную на a_{i1}. В результате приходим к матрице B_2.

2. Пусть на предыдущем шаге получена матрица B_k, $k = 2, 3, \ldots, n-1$. Умножаем каждую строку с номером i, $i \geq k+1$, на a_{kk}^k и вычитаем из нее строку с номером k, умноженную на a_{ik}^k. Строки с номерами $k+1, k+2, \ldots, n$ сокращаем на $a_{k-1,k-1}^{k-1}$ и приходим к матрице B_{k+1}.

3. После $(n-1)$-го шага приходим к треугольной матрице B_n, в последней строке которой два ненулевых элемента, $a_{nn}^n = \Delta$ и $a_{n,n-1}^n = \Delta_n$.

Обратный ход.

1. Пусть уже известны $\Delta_n, \Delta_{n-1}, \ldots, \Delta_{k+1}$, $1 \leq k \leq n-1$; тогда, используя элементы матрицы B_n найдем Δ_k по формуле

$$\Delta_k = \frac{\Delta a_{k,n+1}^k - \sum_{j=k+1}^n a_{k,j}^k \Delta_j}{a_{kk}^k},$$

где дробная черта означает операцию деления нацело.

2. Решение системы находим по формулам Крамера $x_i = \Delta_i/\Delta, i = 1, 2, \ldots, n$.

5 Вычисление элементов присоединенной матрицы

Одним из важных применений данного метода является вычисление присоединенной матрицы в целостном коммутативном кольце с единицей.

Пусть $P = \|p_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \ldots n$, – присоединенная матрица для матрицы $A = \|a_i, j\|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$; тогда определение ее элементов можно свести [3] к решению n систем вида

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} p_{kj} = \Delta \delta_{i,j}, \quad i = l, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\delta_{i,j}$, – дельта-символ Кронекера и $\Delta = |A|$.

Как обычно, прямой ход для всех n матриц можно провести одновременно, если вместо (1.2) взять матрицу

$$B_E = \left\| \begin{array}{ccccccc} a_{11} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array} \right\|.$$

В результате получим матрицу $B_{En} = \|a_{ij}^n\|$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, 2n$, у которой все элементы ниже главной диагонали и выше последней диагонали – нули, а ненулевыми элементами в последней строке будут $a_{nn}^n = \Delta$ и $a_{n,n+j}^n = p_{nj}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Обратный ход совершается обычным образом: пусть уже известны элементы p_{ij}, $i = k + l, k + 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $1 \le k \le n - 1$, последних $n - k$ строк присоединенной матрицы P; тогда элементы k-й строки присоединенной матрицы получим, используя элементы матрицы B_{En}, по формуле

$$p_{kj} = \frac{\Delta a_{k,n+j}^k - \sum_{i=k+1}^{n} a_{k,i}^k p_{ij}}{a_{kk}^k}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где дробная черта означает операцию деления нацело.

Нетрудно видеть, что необходимое количество операций для данного алгоритма решения системы уравнений и соответствующего ему алгоритма отыскания элементов присоединенной матрицы имеет тот же порядок, что и для метода Гаусса.

6 Литература

1. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. М.: Наука, 1979.
2. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970.
3. Фаддеев Д. К; Фаддеева В. К. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963.
4. Гатмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию 22.X.1981

Переработанный вариант 4.X.1982