О РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ НАД КОММУТАТИВНЫМ КОЛЬЦОМ *

Г. И. Малашонок

Пусть R — коммутативное кольцо. Рассмотрим систему линейных уравнений над R

$$Ax = a, \tag{1}$$

где $A \in R^{n\times m},\ a \in R^n,\ x \in R^m$, с расширенной матрицей коэффициентов $A^* = \|\alpha_{i,j}\|$ ($i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m+1$). Будем называть систему (1) вырожденной, если аннулятор всех коэффициентов системы — это ненулевой идеал.

Для решения системы (1), вообще говоря, достаточно указать метод понижения порядка системы, т. е. свести решение системы к одной или нескольким системам с меньшим числом неизвестных, возможно, в другом коммутативном кольце. В настоящей работе будет получен метод понижения порядка произвольной невырожденной системы, возможно, с переходом к фактор-кольцу (см. теоремы 1, 2), и приведены два удобных алгоритма: метод обращающей матрицы и метод прямого и обратного хода. Для вырожденных систем будут рассмотрены способы для снятия вырождения, т. е. для перехода к невырожденным системам того же порядка в подходящем фактор-кольце (см. теоремы 3—5). В частности, можно снять вырождение, если коэффициенты системы порождают главный идеал и кольцо R содержит 1, это, к примеру, позволяет находить решение произвольной системы над коммутативным кольцом главных идеалов с единицей.

1. **Невырожденные системы.** Систему линейных уравнений $A'x' = a'$ над коммутативным кольцом R' назовем *φ-эквивалентной* системе (1), если существует такой гомоморфизм $\varphi : R \to R'$, что

$$\{x : Ax = a\} = \varphi^{-1}\{x' : A'x' = a'\}.$$

В случае, когда φ – тождественный автоморфизм, получаем обычную эквивалентность систем.

Теорема 1 *Пусть $\mathcal{N} \subset R$ и $\operatorname{Ann}\mathcal{N}$ – аннулятор множества $\mathcal{N}$, тогда*

$$\bigcap_{\delta\in\mathcal{N}} \{x : \delta Ax = \delta a\}$$

является множеством решений системы $Ax = a \mod (\operatorname{Ann}\mathcal{N})^{\mathrm{n}}$, где $(\ )^n$ обозначает n-ю кронекерову степень.

*МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ т. 42, № 4 (1987)

Доказательство. Пусть t — одно из решений этой системы, тогда найдется такое $b \in (\mathrm{Ann}\,\mathcal{N})^{\mathrm{n}}$, что $At = a + b$. Так как $\delta b = 0\ \forall \delta \in \mathcal{N}$, то, умножая последнее равенство на δ, находим $\delta At = \delta a\ \forall \delta \in \mathcal{N}$. И наоборот, если $\delta At = \delta a\ \forall \delta \in \mathcal{N}$ и $\mathrm{Ann}\,\delta$ – аннулятор δ, то $At - a \in (\mathrm{Ann}\,\delta)^{\mathrm{n}}\ \forall \delta \in \mathcal{N}$. Так как $\bigcap_{\delta \in \mathcal{N}} \mathrm{Ann}\,\delta = \mathrm{Ann}\,\mathcal{N}$, то отсюда $At - a \equiv 0 \mod (\mathrm{Ann}\,\mathcal{N})^{\mathrm{n}}$.

В частности, когда $\mathcal{N} = \{\delta\}$, получим

Следствие 1. *Пусть $\delta \in R$, $R' = R/\mathrm{Ann}\,\delta$ – фактор-кольцо и $\varphi : R \to R'$ – канонический гомоморфизм. Тогда система $\delta Ax = \delta a$ над R φ-эквивалентна системе $\varphi(A)x' = \varphi(a)$ над R'.*

Это следствие позволяет избавиться от общих множителей у коэффициентов системы.

Пусть теперь δ – это некоторый минор порядка r матрицы A. Не уменьшая общности, положим, что $\delta = \det A_0$,

$$A = (A', A''),\ A' = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix},\ A'' = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix},\ a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Введем также четыре типа миноров, связанных с минором δ: δ_{ij} – минор, полученный окаймлением минора δ строкой i и столбцом j матрицы A^*, $\delta^{(ij)}$ – минор, который будет стоять на месте минора δ, если в матрице A^* столбец i заменить на столбец j, $\delta_{(ij)}$ – минор, который будет стоять на месте минора δ, если в матрице A^* строку i заменить на строку j, δ^{ij} — алгебраическое дополнение элемента (i,j) в матрице A_0. И соответственно введем четыре новые матрицы и два вектора, элементами которых являются эти миноры:

$$\begin{gathered} D = \|\delta_{ij}\| \ \ (i = r+1, \ldots, n;\ j = r+1, \ldots, m); \\ d = \|\delta_{i,m+1}\| \ \ (i = r+1, \ldots, n); \\ D_C = \|\delta^{(ij)}\| \ \ (i = 1, \ldots, r;\ j = r+1, \ldots, m); \\ d_C = \|\delta^{(i,m+1)}\| \ \ (i = 1, \ldots, r); \\ D_L = \|\delta_{(ij)}\| \ \ (i = 1, \ldots, r;\ j = r+1, \ldots, n); \\ D_O = \|\delta^{ij}\| \ \ (i = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, r). \end{gathered} \tag{3}$$

Теорема 2 *Системы линейных уравнений*

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \delta A_0 x_0 & + & \delta B_0 x_1 & & & = & \delta a_0 \\ \delta A_1 x_0 & + & \delta B_1 x_1 & & & = & \delta a_1 \\ \delta x_0 & + & D_C x_1 & - & x_2 & = & d_C \end{array} \right.$$

и

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \delta x_0 & + & D_C x_1 & - & x_2 & = & d_C \\ & & D x_1 & + & A_1 x_2 & = & d \\ & & & & A_0 x_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

эквивалентны.

Доказательство. Преобразуем первую систему: из первого и второго уравнения вычтем третье уравнение, умножая его предварительно на A_0 и A_1 соответственно. Для получения второй системы теперь осталось воспользоваться легко проверяемыми тождествами $A_0 D_C = \delta B_0$, $D = \delta B_1 - A_1 D_C$, $d = \delta a_1 - A_1 d_C$.

Вторую систему назовем *канонической.* Доказанная теорема позволяет искать решения системы $\delta Ax = \delta a$, поочередно решая подсистемы меньшего порядка, входящие в каноническую систему. Если же система (1) невырожденная, то у матрицы A найдется такое множество миноров $\mathcal{N}$, что $\operatorname{Ann}\mathcal{N} = 0$, и по теореме 1 решение системы (1) сводится к нахождению пересечения решений совокупности систем $\delta Ax = \delta a,\ \delta \in \mathcal{N}$.

Систему линейных уравнений называют *согласованной по рангу*, если ранг основной и расширенной матрицы коэффициентов системы равны [1]. Как известно, не согласованные по рангу системы несовместны.

Рассмотрим теперь некоторые следствия теоремы 2, при этом учтем, что если δ – не делитель нуля, то система $A_0x_2 = 0$ имеет только нулевое решение и системы $Ax = a$ и $\delta Ax = \delta a$ эквивалентны.

Следствие 1. *Если система (1) согласована по рангу, $\delta \neq 0$ и $r = \operatorname{rank}A$, то каноническая система сводится к трем подсистемам $A'x_2 = 0$, $D_Cx_1 \equiv (d_C + x_2) \mod (\delta R)^r$, $\delta x_0 = d_C + x_2 - D_Cx_1$.*

Следствие 2.*Если δ – не делитель нуля, то система (1) сводится к двум подсистемам $Dx_1 = d$, $\delta x_0 = d_C - D_Cx_1$.*

Следствие 3. *Если система (1) согласована по рангу, $r = \operatorname{rank}A$ и δ – не делитель нуля, то система (1) сводится к двум подсистемам $D_Cx_1 \equiv d_C \mod (\delta R)^r$ и $\delta x_0 = d_C - D_Cx_1$*

2. Вырожденные системы. Пусть $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}^*$ – идеалы, порожденные элементами матриц A и A^* соответственно. Для совместности системы (1), очевидно, необходимо, чтобы эти идеалы были равны.

Теорема 3 *Пусть R содержит единицу, $\lambda \in R$, $\mathcal{J} = \mathcal{J}^* = \lambda R$ – ненулевой главный идеал и $\varphi : R \to R/\operatorname{Ann}\lambda$ – канонический гомоморфизм, тогда система (1) φ-эквивалентна невырожденной системе $\varphi(G)x' = \varphi(g)$, при этом матрица $G = \|\gamma_{i,j}\|$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$ и вектор $g = \|\gamma_{i,m+1}\|$ $(i = 1, \ldots, n)$ определяются равенством $(A\ a) = \lambda(G\ g)$.*

Доказательство. φ-эквивалентность систем устанавливается следствием 1 теоремы 1. Покажем, что $\varphi(G)x' = \varphi(g)$ – невырожденная система. По условию $a_{ij} = \lambda\gamma_{ij}$ и найдутся такие элементы $\tau_{ij} \in R$, что $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\tau_{ij}a_{ij} = \lambda$. Отсюда следует, что $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\tau_{ij}\gamma_{ij} - 1 \in \operatorname{Ann}\lambda$, и в соответствии с гомоморфизмом φ находим, что $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\varphi(\tau_{ij})\varphi(\gamma_{ij}) = \varphi(1)$, т. е. элементы матрицы $\varphi(G)$ порождают единичный идеал.

Теорема 4 *Пусть $\mathcal{J} = \mathcal{J}^* \neq 0$, $\operatorname{Ann}\mathcal{J} \bigcap \mathcal{J} = 0$ и $\varphi : R \to R/\operatorname{Ann}\mathcal{J}$ — канонический гомоморфизм. Тогда система (1) φ-эквивалентна невырожденной системе $\varphi(A)x' = \varphi(a)$.*

Доказательство. Пусть для некоторого $t \in R^m$ $\varphi(A)\varphi(t) = \varphi(a)$, тогда $At - a \in (\operatorname{Ann}\mathcal{J})^{\mathrm{n}}$, но $At - a \in \mathcal{J}^n$, а по условию теоремы $\operatorname{Ann}\mathcal{J} \bigcap \mathcal{J} = 0$, следовательно, $At = a$, т. е. имеет место φ-эквивалентность. Пусть теперь $\mu \in \varphi^{-1}(\operatorname{Ann}\varphi(\mathcal{J}))$. Тогда для каждого элемента a матрицы A $\varphi(\mu)\varphi(a) = 0$, следовательно, $\mu a \in \operatorname{Ann}\mathcal{J}$, но $\mu a \in \mathcal{J}$, отсюда $\mu a = 0$. Таким образом, $\mu \in \operatorname{Ann}\mathcal{J}$ и $\varphi(\mu) = 0$, следовательно, $\operatorname{Ann}\varphi(\mathcal{J}) = 0$, что доказывает невырожденность.

Теорема 5 *Пусть $\mathcal{J} = \mathcal{J}^* \neq 0$ и $\mathcal{I}_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ – такие идеалы, кольца R, что $\lambda\mathcal{J} \nsubseteq \mathcal{I}_i$ $\forall\lambda \in R \setminus \mathcal{I}_i$, и $\bigcap_{i=1}^k \mathcal{I}_i \bigcap \mathcal{J} = 0$, $\varphi_i : R \to R/\mathcal{I}_i$ – канонические гомоморфизмы. Тогда*

$$\bigcap_{i=1}^{k} \varphi_i^{-1}\{x_i : x_i \in R/\mathcal{I}_i, \;\; \varphi_i(A)x_i = \varphi_i(a)\}$$

является множеством решений системы (1), а каждая система $\varphi_i(A)x_i = \varphi_i(a)$ не вырождена.

Доказательство. Пусть $t \in R^m$ и $\varphi_i(A)\varphi_i(t) = \varphi_i(a)$ $\forall i$, тогда $At - a \in \mathcal{I}_i$ $\forall i$, но $At - a \in \mathcal{J}^n$ и по условию $\bigcap_{i=1}^k \mathcal{I}_i \bigcap \mathcal{J} = 0$, следовательно, $At - a = 0$.

И наоборот, если $At = a$, то $\varphi_i(A)\varphi_i(t) = \varphi_i(a)$ $\forall i$.

Покажем теперь невырожденность. Пусть $\mu \in \varphi_i^{-1}(\operatorname{Ann}\varphi_{\mathrm{i}}(\mathcal{J}))$, тогда для каждого элемента a матрицы A $\varphi_i(\mu)\varphi_i(a) = 0$, т. е. $\mu a \in \mathcal{I}_i$. Следовательно, $\mu\mathcal{J} \subset \mathcal{I}_i$, но по условию $\lambda\mathcal{J} \nsubseteq \mathcal{I}_i$ $\forall\lambda \in R \setminus \mathcal{I}_i$, значит, $\mu \in \mathcal{I}_i$. Таким образом, $\operatorname{Ann}\varphi_{\mathrm{i}}(\mathcal{J}) = 0$.

3. Построение канонической системы. Для любых целых чисел r, n, m таких, что $1 \leqslant r \leqslant n$, $1 \leqslant r \leqslant m$, можно ввести функцию $F_r : R^{n\times m} \to R^{n\times m}$, которую назовем *обращающей функцией порядка* r, определив ее уравнением

$$F_r(A) = \begin{pmatrix} E_\delta & D_C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Здесь и ниже мы используем обозначения (2) и (3), а через E_ξ обозначаем матрицы вида $\operatorname{diag}(\xi, \xi, \ldots \xi)$ $\forall\xi \in R$. Отметим, что определенная таким образом функция позволяет обратить матрицу A^* в расширенную матрицу коэффициентов канонической системы без неизвестного x_2:

$$F_r(A^*) = \begin{pmatrix} E_\delta & D_C & d_C \\ 0 & D & d \end{pmatrix}$$

которая легко достраивается до полной канонической системы.

Введем также для матрицы $A' \in R^{n\times r}$ $(n \geqslant r)$ ее *обращающую матрицу*

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} D_O^T & 0 \\ D_L^T & E_\delta \end{pmatrix} \in R^{n\times n}.$$

Заметим, что для квадратной матрицы ее обращающей матрицей будет присоединенная матрица. Как обобщение соответствующего равенства для присоединенной матрицы имеет место следующее равенство: $\hat{A}' \cdot A' = \begin{pmatrix} E_\delta \\ 0 \end{pmatrix}$. Непосредственной проверкой можно показать справедливость следующих предложений.

Предложение 1. *Вычисление обращающей функции порядка r матрицы A осуществляется умножением матрицы A слева на обращающую матрицу такой подматрицы, которая образована первыми r столбцами матрицы A : $F_r(A) = \hat{A}' \cdot A$.*

Предложение 2. *Элементы обращающей матрицы могут быть вычислены с помощью обращающей функции:*

$$F_r(A_0^T \;\, A_1^T \;\, E_\xi) = (E_\delta \;\, D_L \;\, \xi \cdot D_O).$$

Другим способом вычисления обращающей функции является метод прямого и обратного хода, который получается простым обобщением метода, описанного в [2]. Обозначая через α_{ij}^k минор порядка k матрицы A^*, образованный окаймлением минора порядка $k-1$, стоящего в верхнем левом углу, строкой i и столбцом j, можем записать детерминантные тождества прямого хода

$$\alpha_{ij}^{k+1}\alpha_{k-1,k-1}^{k-1} = \alpha_{kk}^k\alpha_{ij}^k - \alpha_{ik}^k\alpha_{kj}^k$$

$$(2 \leqslant k \leqslant r,\ k < i \leqslant n,\ k < j \leqslant m+1)$$

и деторминантные тождества обратного хода

$$\delta^{(kp)}\alpha_{k,k}^k = \delta\alpha_{kp}^k - \sum_{j=k+1}^{r} \delta^{(ip)}\alpha_{kj}^k$$

$$(1 \leqslant k \leqslant r,\ r+1 \leqslant p \leqslant m+1).$$

Если среди угловых миноров α_{kk}^k $(k = 1, 2, \ldots, r-1)$ нет делителей нуля, то, применяя тождества прямого хода, найдем все окаймляющие миноры вплоть до миноров порядка $r+1$, при этом получим все элементы $\delta_{ij} = \alpha_{ij}^{r+1}$ матрицы $(D\ d)$, элементы $\delta^{(rj)} = \alpha_{rj}^r$ последней строки r матрицы $(D_C\ d_C)$ и минор $\delta = \alpha_{rr}^r$. Затем, применяя тождества обратного хода, найдем все остальные элементы $\delta^{(kp)}$ матрицы $(D_C\ d_C)$.

СКТБ Фпзпко-механпческого
института АН УССР

Поступило
16.09.85

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Клейнер Г. Б. О системах линейных уравнении над коммутатпнными кольцами // УМН. 1973. Т. 28, выц. 6. С. 211–212.

[2] Малашонок Г. И. Решение системы линейных уравнений в целостном кольцо // Журн. вычисл. математики п мат. физики. 1983. Т. 23, № 6. С. 1497–1500.